Autograph 活用授業例

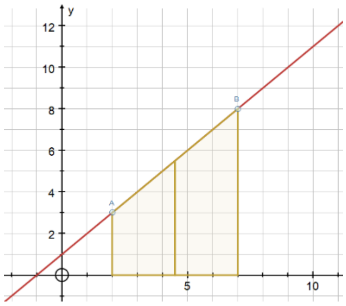
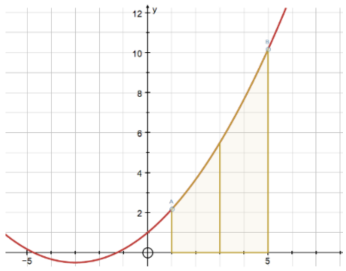
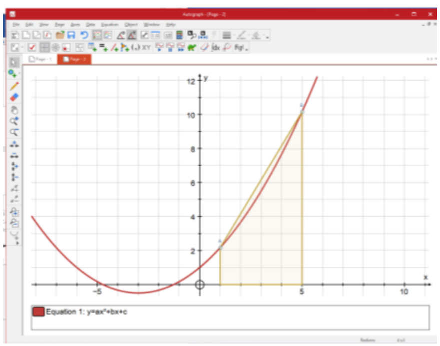
作成日　2019 年 2 月 12 日
更新日　2019 年 4 月 1 日
（株）アフィニティサイエンス
Email: help@affinity-science.com

＜概要＞

タイトル	曲線で囲まれた面積を求めよう
数学単元	数学 II 微分・積分の考え＞積分の考え＞面積
授業形態	実演（教師のみ Autograph 使用環境を整える必要あり。）
事前操作	20 分
指導時間	50 分（導入 10 分＋実演操作 20 分＋解説 20 分）
バージョン	Autograph4.0
レベル	Standard/Advanced
難易度	★★★☆☆
目標	定積分と面積の考え方について理解を深めること。
概要	２次曲線と x 軸の間にある図形の、x 座標が a から b の面積を求める問題について、長方形を敷き詰めて考えることで、積分で求める考え方へ誘導します。
指導計画	有　／　生徒用ワークシート：有
参考文献	数学 II（俣野博・河野俊丈他 27 名：著、東京書籍）

＜指導計画＞

※ボックス内は、＜生徒用ワークシート＞の空欄箇所に対応しています。

導入 (10 分)	「**図 1**」を見てください。y=ax+b のグラフと x 軸、点 A, B に囲まれたこの台形部分の面積を求めてみましょう。 マス目の数を数えたり、台形の面積の公式を使ったりして簡単に求めることができますね。  **図 1** それでは、「**図 2**」に示したような面積はどのようにして求めればよいでしょうか。今度は、曲線部分があるので、難しそうです。  **図 2**
実演操作 (20 分)	曲線 AB を直線に近似して、一つの台形の面積を求める考え（「**図 3**」）はどうでしょう。 「**図 2**」の Area 部分をダブルクリックして「Edit Area」画面を表示します。面積を求めたい部分を台形近似するために、Method＞Trapezium Rule にチェックして「OK」を選択します。 ※trapezium：台形  **図 3**

「図 3」のように一つの台形に近似してしまうと、実際の値よりもずれが大きそうですね。
では、曲線 AB をさらに細かく区切って、いくつか台形を作り、各台形の面積の和を求める考えはどうでしょう。

「図 3」の Area 部分をダブルクリックして「Edit Area」画面を表示します。
近似の台形を細かく分割するために、Method＞Parameters＞Divisions の値を大きくします。図は、Divisions の値を「10」にしたものです。

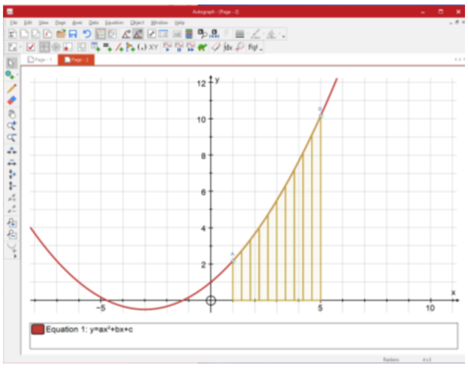


図 4

「OK」をクリックすると、「図 4」が得られます。
一つの台形に近似するよりも近い値が求まりそうです。
さて、「図 5」や「図 6」のような考え方はどうでしょうか。

「図 4」の Area 部分をダブルクリックして「Edit Area」画面を表示します。Method＞Trapezium Rule＞Rectangle(-)にチェックをします。
「OK」をクリックすると、「図 5」が得られます。

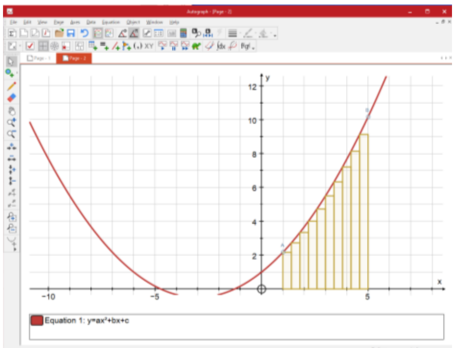


図 5

新たに二点 A, B を選択し、「図 1 作成方法③」と同じ要領で、Create＞Area を選択します。
Method＞Rectangle(+)にチェックをします。
「Divisions」の値は、「図 5」の設定と同じ数にしてください。図では「10」にしています。

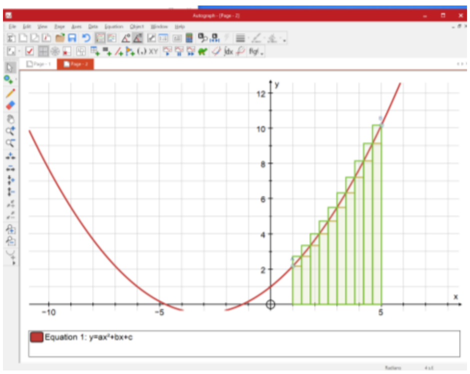
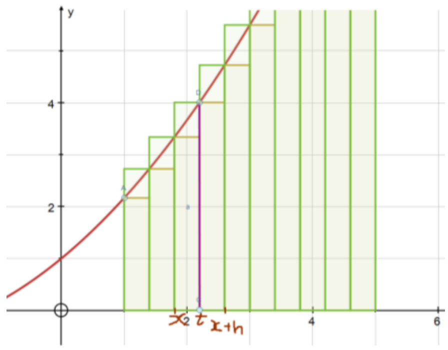


図 6

「OK」をクリックすると、「図 6」が得られます。
実は、この「図 5」や「図 6」のような考え方が「定積分」の考えのもとに

解説 (20分)	なっています。 曲線 y＝ f (x)と x 軸の間にある図形の、x 座標が a から x までの面積を S(x)とします。 x の値が x から x+h まで変化したときの S(x)の変化量 $\boxed{S(x+h)-S(x)}$ は、h ＞0 のときから、x から x+h までの区間において、曲線 y＝ f (x)と x 軸の間にある図形の面積です。 $\boxed{x \leq t \leq x+h}$ として、この図形の面積が横の長さ h、縦の長さ f (t)の長方形の面積と等しくなるように t をとると、$\boxed{S(x+h)-S(x)=h\,f(t)}$。 よって、$\boxed{\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=f(t)}$ と表せます。 ここで、h→0 のとき t→x であるので、 f (t)→ f (x)となります。したがって、$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=f(x)}$ と表せます。 h＜0 のときにも同様にしてこの式が成り立つことがわかります。 ゆえに、$\boxed{S'(x)=f(x)}$ と表すことができ、S(x)は f (x)の $\boxed{\text{原始関数}}$ であることがわかります。 さて、F(x)を f(x)の原始関数の 1 つとすると、ある定数 C を用いて、 $\boxed{S(x)=F(x)+C}$ **式(1)** となります。**式(1)**で x＝a と置くと、S(x)の意味により、$\boxed{S(a)=0}$ ですので、$\boxed{F(a)+C=0}$、つまり、$\boxed{C=-F(a)}$ と表せます。 これを**式(1)**に代入すると、$\boxed{S(x)=F(x)-F(a)}$ となります。 x＝b とおくと、$\boxed{S(b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx}$ と表すことができ

ます。



解説補足図

S(b)をSと書くと、次のことが成り立ちます。

区間$\boxed{a \leq x \leq b}$において、$\boxed{f(x) \geq 0}$であるとする。

曲線$\boxed{y = f(x)}$とx軸及び2直線$x = a$、$x = b$で囲まれた図形の面積Sは、

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx}$$

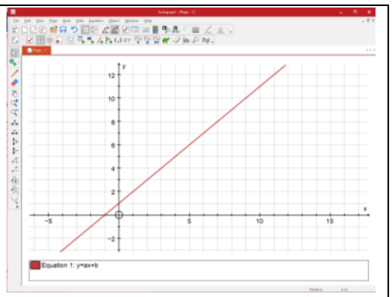
＜事前操作＞（計 20 分）

1.　「**図 1**」作成方法(10 分)

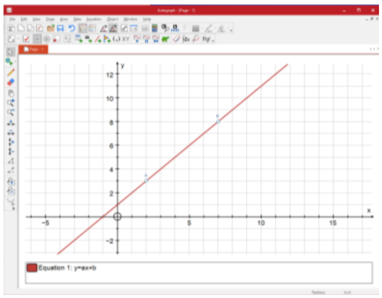
① ２D グラフ画面を用意し、式挿入のアイコンから次の関数のグラフを作成します。

$$y=ax+b$$

簡単のため、定数 a, b はともに 1 とすることをお勧めします。

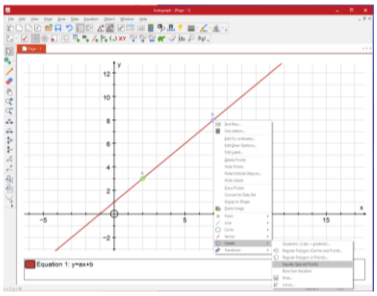


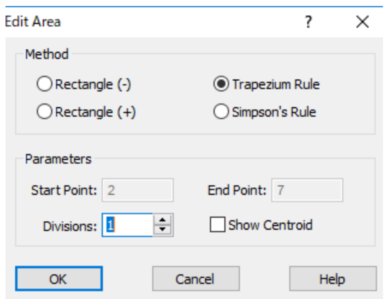
② 点をプロットするためのアイコンからグラフ上に二点 A, B をプロットします。簡単のため、格子上にプロットすると良いでしょう。

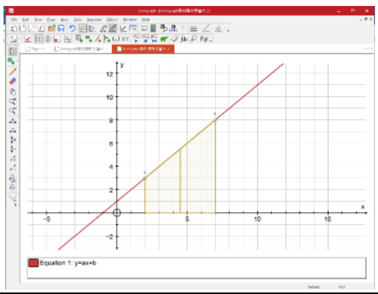


③ 点 A, B を選択した状態で右クリックし、Create＞Area を選択します。
面積を求めたい部分を塗りつぶすため、Method＞Simpson’s Rule を選択します。
求めたい面積の分割数を指定するため、Parameters＞Divisions の値を「1」に設定します。
最後に「OK」をクリックすると、「**図 1**」が得られます。

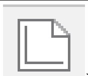
※Simpson’s：近似方法の名称



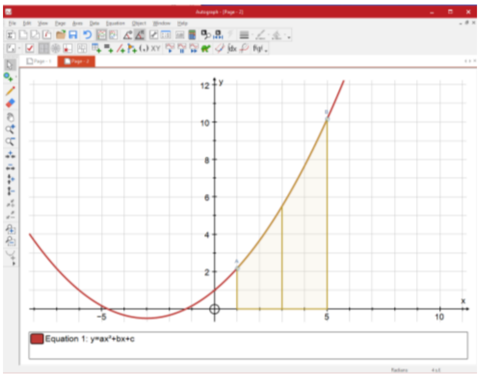




2.　「**図 2**」作成方法(10 分)

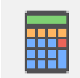
別の２Ｄシートを用意し  、「**図 1**」の作成方法と同じ要領で作成します。初めに入力する式を２次関数の式にします。

$$y=ax^2+bx+c$$



＜Autograph のより効果的な利用法＞

◎「Calculation」の使用

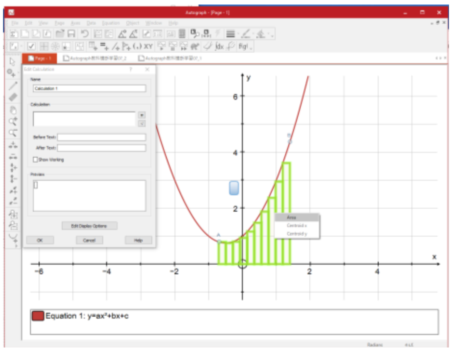
「Calculation」のアイコン  をクリックします。「Calculation」部分にカーソルがあることを確認してから、先の操作で表示された近似図形を選択し、右クリック＞Area を選択します。

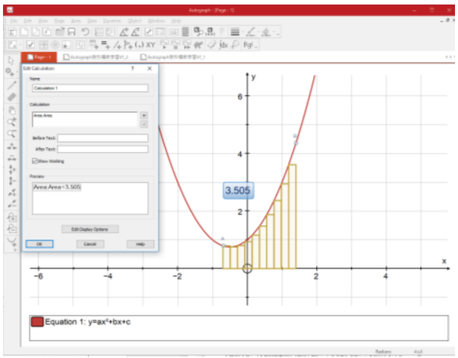
「Before Textbox」や「After Textbox」の欄に任意の文字を入力することができます。

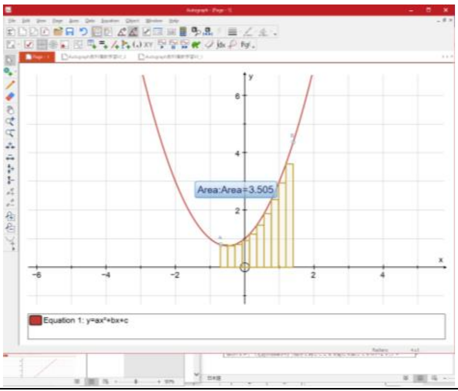
「Show Working」のチェックボックスにチェックを入れると、自動的に計算内容が記述されます。

最後に「OK」を選択すると、面積の値がテキストボックス内に表示されます。

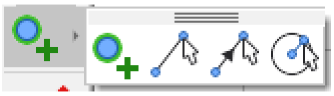
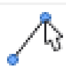
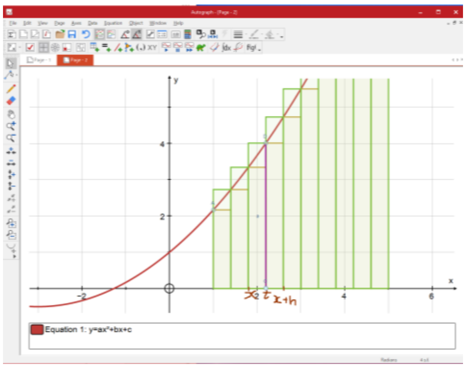
図は、「Before Textbox」や「After Textbox」の欄を空欄、「Show Working」のチェックボックスにチェックを入れて「OK」を選択した場合の図です。







◎図への書き込み

グラフの拡大アイコンや移動アイコンを用いて画面を調整します。モードツールバーで「Scribble」のアイコンを選択し、グラフに書き込みます。直線 a は、モードツールバーのから、直線を描くためのアイコンを用います。	 ↑「**図 5**」と「**図 6**」を同時に表示して書き込み作業を行った図（**解説補足図**）

＜生徒用ワークシート＞（1/2）

曲線で囲まれた面積を求めよう

日付　　　　　　年　　　月　　　日

年　　　組　　　番

名前

「**図 1**」を見てください。y=ax+b のグラフと x 軸、点 A, B に囲まれたこの台形部分の面積を求めてみましょう。

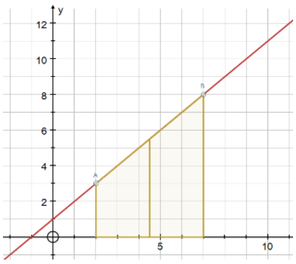


図 7

それでは、「**図 2**」に示したような面積はどのようにして求めればよいでしょうか。

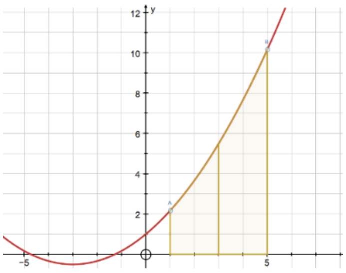


図 8

次の考え方はどうでしょうか？

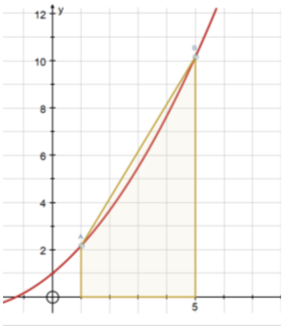


図 3

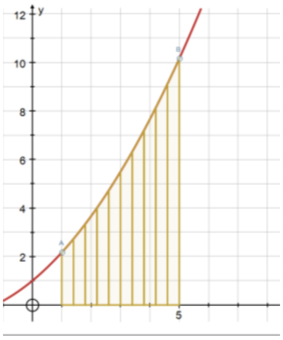


図 4

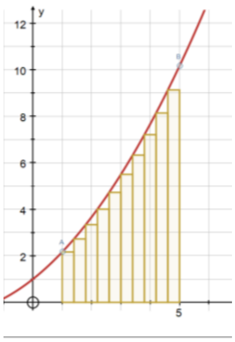


図 5

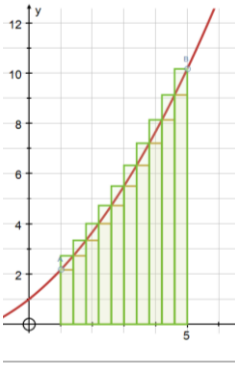


図 6

＜生徒用ワークシート＞（2/2）

曲線 y＝ f (x)と x 軸の間にある図形の、x 座標が a から x までの面積を S(x)とします。

x の値が x から x＋h まで変化したときの S(x)の変化量$\boxed{\quad\quad\quad}$は、 h ＞0 のときから、x から x＋h までの区間において、曲線 y＝ f (x)と x 軸の間にある図形の面積です。

$\boxed{\quad\quad\quad}$として、この図形の面積が横の長さ h、縦の長さ f (t)の長方形の面積と等しくなるように t をとると、$\boxed{\quad\quad\quad}$。

よって、$\boxed{\quad\quad\quad}$と表せます。

ここで、h→0 のとき t→x であるので、 f (t)→ f (x)となります。したがって、

$\boxed{\quad\quad\quad}$と表せます。

h＜0 のときにも同様にしてこの式が成り立つことがわかります。

ゆえに、$\boxed{\quad\quad\quad}$と表すことができ、S(x)は f (x)の$\boxed{\quad\quad\quad}$であることがわかります。

さて、F(x)を f(x)の原始関数の 1 つとすると、ある定数 C を用いて、

$\boxed{\quad\quad\quad}$ **式(1)**

となります。**式(1)**で x＝a と置くと、S(x)の意味により、$\boxed{\quad\quad\quad}$

ですので、$\boxed{\quad\quad\quad}$、つまり、$\boxed{\quad\quad\quad}$と表せます。

これを**式(1)**に代入すると、$\boxed{\quad\quad\quad}$となります。

x＝b とおくと、$\boxed{\quad\quad\quad}$と表すことができます。

S(b)を S と書くと、次のことが成り立ちます。

区間$\boxed{\quad\quad\quad}$において、$\boxed{\quad\quad\quad}$であるとする。

曲線$\boxed{\quad\quad\quad}$と x 軸及び 2 直線x = a、x = bで囲まれた図形の面積 S は、

$\boxed{\quad\quad\quad}$